1774

Determinatio motus oscillatorii in praecedente dissertatione pertracti, ex primus mechanicae principiis petita

Leonhard Euler

DETERMINATIO
MOTVS OSCILLATORII,
IN PRAECEDENTE DISSERTATIONE PERTRACTATI, EX PRIMIS MECHANICAE PRINCIPIIS PETITA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Tab. I. Fig. 4. 5. Figura concipiatur in plano verticali descripta, cui axis girationis in A sit normalis, vnde ducta notetur recta verticalis A V, a qua pro dato tempore $= t$ filum A B declinet angulo B A V $= \theta$. Filo autem in B alligatum sit corpus B M N, cuius centrum grauitatis reperiatur in C, ex quo per B recta C B D producta verticali occurrat in puncto D, cum ea faciens angulum C D V $= \Phi$, tum vero vocetur longitudo fili A B $= a$ et interuallum B C $= b$, ipsum autem filum A B concipiatur grauitatis expers, corporis autem annexi B M N pondus seu massa vocetur $= M$, iam in hoc corpore concipiatur axis ad planum verticale normalis per centrum grauitatis C ductus, cuius respectu sit corporis momentum inertiae $= M c c$, vnde si corpus fuerit globus radio B C $= b$ descriptus, notum est fore $c c = \frac{2}{5} b b$, generatim autem calculum ad alia quae-

quaecunque corpora accommodare licet, dummodo memoratus axis per C ductus simul fuerit vnus ex axibus principalibus cuiusque corporis, quia aliter corpus circa eum libere girari non posset sed motum quendam turbinatorium acciperet.

§. 2. His positis, vt in motum huius corporis B M N quatenus filo A B est allegatum, inquiramus, vires illud sollicitantes perpendere debemus, duae autem tantum occurrunt huiusmodi vires, altera vis grauitatis ponderi corporis M aequalis, directionem habens verticalem C E ipsi centro grauitatis C applicata, altera vero vis corpori in puncto B est applicata tensioni fili A B aequalis quam littera T designemus. Iam in corpore B M N duplex motus est considerandus, alter progressiuus, quo centrum grauitatis C fertur, quem secundum directiones fixas C E et C Q commodissime resoluimus: Alter est cuius motus giratorius circa centrum grauitatis C, quem ex variabilitate anguli C D V $= \Phi$ diiudicari oportet; quemadmodum igitur vterque motus per vires sollicitantes determinari debeat, prima mechanicae principia luculenter declarant.

§. 3. Primo igitur motum progressiuum centri grauitatis C inuestigemus, quem in finem vocemus coordinatas A Q $= x$ et Q C $= y$, ac manifestum est fore $x = a \cos. \vartheta + b \cos. \Phi$ atque $y = a \sin. \vartheta + b \sin. \Phi$, tum vero tensio fili $=$ T pro directione verticali P A, dat vim $=$ T cos. ϑ at pro directione horizontali B P vim $=$ T sin. ϑ, grauitas autem

 seu

seu pondus corporis $= M$ pro sola directione verticali suppeditat vim $= M$ deorsum tendentem, pro directione autem horizontali nullam. Hinc autem principia mechanicae sumto elemento temporis dt constante ac denotante g altitudinem, per quam gravia vno minuto secundo libere delabuntur, sequentes duas aequationes suppeditant

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{M - T\,\text{cos.}\,\vartheta}{M}, \quad \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-T\,\text{sin.}\,\vartheta}{M}$$

quae formulae ita sunt comparatae, vt tempus iam in minutis secundis exprimant, indeque ad quodlibet tempus in minutis secundis expressum, status corporis clarissime definiatur, vtcunque etiam motus fuerit irregularis.

§. 4. Pro motu autem giratorio corporis circa axem in centro grauitatis C conceptum, vis grauitatis $CE = M$ nullum plane praebet momentum, tensio autem fili T, qua corpus in directione BD vrgetur ob angulum $ABD = \Phi - \vartheta$ respectu istius axis praebet momentum $= Tb\,\text{sin.}\,(\Phi - \vartheta)$ quod angulum girationis $BDP = \Phi$ imminuere tendit, hoc vero momentum per momentum inertiae Mcc diuisum, exhibebit retardationem motus giratorii, quae ergo hac aequatione exprimetur

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-Tb\,\text{sin.}\,(\Phi - \vartheta)}{Mcc}$$

quae aequatio cum duabus praecedentibus coniuncta omnia determinat, quae ad motus cognitionem desiderari possunt, ex his enim tribus aequationibus ad quoduis tempus t ternas nostras incognitas angulos scilicet

scilicet ϑ et Φ cum tensione T definire licebit; quantaecunque etiam fuerint penduli excursiones, quibus autem generatim euoluendis hic non immoror.

§. 5. Contemplabor enim, cum illustri Auctore superioris dissertationis, tantum oscillationes quam minimas, ita vt bini anguli ϑ et Φ semper spectari queant tanquam infinite parui, hinc sinus istorum angulorum ipsis aequales, cosinus vero vnitati aequales censeri poterunt, ideoque habebimus nostras coordinatas $x = a + b$ et $y = a\vartheta + b\Phi$, ex quo ternae nostrae aequationes sequentes induent formas

I. $0 = \frac{M - T}{M}$

II. $\frac{a\,dd\vartheta + b\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-T\vartheta}{M}$

III. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-Tb(\Phi - \vartheta)}{Mcc}$

ex quarum prima statim sponte innotescit quantitas tensionis fili $T = M$, semper scilicet ipsi ponderi corporis M erit aequalis; hoc igitur valore substituto duae reliquae nostrae aequationes erunt

prior $\frac{a\,dd\vartheta + b\,dd\Phi}{2g\,ds^2} = -\vartheta$ et altera $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-b\Phi + b\vartheta}{cc}$

ac si ex posteriore loco $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2}$ eius valor in priore substituatur, fiet

$\frac{a\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} \frac{-bb\Phi + bb\vartheta}{cc} = -\vartheta$ siue $\frac{dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \frac{bb\Phi - bb\vartheta - cc\vartheta}{acc}$

$= \frac{bb\Phi - (bb + cc)\vartheta}{acc}$

quae combinata cum altera

$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-b\Phi + b\vartheta}{cc}$

omnia

omnia continet quae, ad solutionem problematis requiruntur.

§. 6. Quo autem harum aequationum differentialium integralia indagemus, eas inter se ita combinemus, vt talis forma prodeat

$$\frac{A\,dd\vartheta + B\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{N(A\vartheta + B\Phi)}{acc},$$

reuera autem prodit

$$\frac{A\,dd\vartheta + B\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{Abb\Phi - A(bb+cc)\vartheta}{acc} - \frac{Bab\Phi + Bab\vartheta}{ac}$$

necesse est igitur, vt fiat.

I. $AN = -A(bb+cc) + Bab$ et II. $NB = Abb - Bab$

ex priore ergo

$$ABN = -AB(bb+cc) + BBab$$

ex altera vero

$$ABN = AAbb - ABab$$

qui duo valores inter se aequati praebent

$$AAbb + AB(bb+cc-ab) = BBab$$

vnde per resolutionem colligimus

$$\frac{A}{B} = \frac{ab - bb - cc \pm \sqrt{(aabb + 2ab^3 - 2abcc + (bb+cc)^2)}}{2bb}$$

ponamus iam breuitatis gratia

$$\frac{ab - bb - cc}{2bb} = p \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{(aabb + 2ab^3 - 2abcc + (bb+cc)^2)}}{2bb} = q,$$

quandoquidem ex tribus quantitatibus cognitis a, b et c hinc litterae p et q facile determinantur, atque hinc pro fractione $\frac{A}{B}$ geminum valorem adipiscimur alterum $\frac{A}{B} = p + q$, alterum $\frac{A}{B} = p - q$, quorum vtrumque seorsim euoluamus.

§. 7.

§. 7. Ex priore igitur habemus $A = p + q$ et $B = 1$ vnde obtinemus

$ABN = (p+q)^2 bb - (p+q)ab$, ergo $N = (p+q)bb - ab$ atque hinc aequatio differentio differentialis prior euadet

$$\frac{(p+q)\,dd\vartheta + dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{((p+q)bb - ab)((p+q)\vartheta + \Phi)}{acc}$$

atque hinc sumendo q negatiue, statim formatur altera aequatio

$$\frac{(p-q)\,dd\vartheta + dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{((p-q)bb - ab)((p-q)\vartheta + \Phi)}{acc}.$$

§. 8. Introducamus nunc loco angulorum ϑ et Φ duos alios angulos u et v ponendo.

$(p+q)\vartheta + \Phi = u$ et $(p-q)\vartheta + \Phi = v$ vt fiat $\vartheta = \frac{u-v}{2q}$

et $\Phi = \frac{u+v}{2} - p\,\frac{(u-v)}{2q}$

quo facto impetramus sequentes duas aequationes differentio differentiales

$$\frac{ddu}{2g\,dt^2} = \frac{-u(ab-(p+q)bb)}{acc} \quad \text{et} \quad \frac{ddv}{2g\,dt^2} = \frac{-v(ab-(p-q)bb)}{acc}$$

quarum altera inseruit quantitati u determinandae, altera vero ipsi v, quandoquidem hae duae quantitates u et v non amplius inuicem sunt permixtae.

§. 9. Ad has aequationes integrandas introducamus duas nouas litteras subsidiarias, statuamusque

$$\frac{2g(ab-(p+q)bb)}{acc} = mm \quad \text{et} \quad \frac{2g(ab-(p-q)bb)}{acc} = nn$$

vt aequationes nostrae integrandae ad has formas simplicissimas reuocentur

$$\frac{ddu}{dt^2} = -mmu, \quad \text{et} \quad \frac{ddv}{dt^2} = -nnv$$

 quarum

quarum integralia bis ſumta reperiuntur per metho-
dos cognitas

$$u = C\,\text{ſin.}\,mt + D\,\text{coſ.}\,mt \quad \text{et} \quad v = E\,\text{ſin.}\,nt + F\,\text{coſ.}\,nt$$

vbi litterae C, D, E, F quantitates conſtantes quas-
cunque ex circumſtantiis motus determinandas deſi-
gnant; quia autem per hypotheſin anguli u et v
perinde ac principales ſemper manere debent quaſi
infinite parui, etiam has conſtantes infinite paruas
eſſe oportet.

§. 10. His igitur conſtantibus rite conſtitutis,
quia numeri m et n dantur, ad quoduis tempus
ab initio elapſum et in minutis ſecundis expreſſum
ambo anguli u et v definiuntur, atque ex his porro
ipſi anguli ϑ et Φ concludentur, quibus ſtatus pen-
duli hoc tempore determinatur.

§. 11. His igitur probe perpenſis, manifeſtum
eſt, Problema quod hic tractamus maxime eſſe com-
plicatum, ſi quidem ſolutio maxime generalis deſi-
deretur. Solutiones autem particulares inde fieri
poterunt plus vel minus ſimplices prouti literarum
C, D, E et F vna pluresue capiantur euaneſcentes,
quibus autem euoluendis hic non immoror, cum in
ſuperiori diſſertatione omnia quae huc pertinent fe-
liciſſime ſint euoluta.

§. 12. Caeterum hic obſeruaſſe iuuabit, hanc
ſolutionem eatenus ſemper locum habere poſſe, qua-
tenus formulae $ab-(p+q)bb$ et $ab-(p-q)bb$ am-
bae habeant valores poſitiuos, quod ſi enim ponatur
$ab - pbb = rbb$, hae formulae in ſequentes trans-
mutan-

mutantur $(r-q)bb$ et $(r+q)bb$, exiſtente $r=\frac{ab+bb+cc}{2bb}$, quare quum ſit $rr>qq$, ob $r+q$ quantitatem poſitiuam, poſitiuum quoque nanciſcetur valorem $r-q$; perpetuo autem tenendum eſt longitudinem fili A B non pro lubitu diminui poſſe, ſi enim nimis breue ſtatuatur, angulus ϑ non amplius ſpectari poterit vt valde exiguus, ſed potius ingentem obliquitatem accipere poſſet, etiamſi alter angulus Φ maneat infinite paruus. Neque vero caſum quo corpus B M N immediate ex axe A ſuſpenditur ita interpretari licet, quaſi filum A B eſſet quam breuiſſimum, quam ob cauſſam conſideratio pendulorum conſuetorum ex A ſuſpenſorum toto coelo a praeſente Problemate diſcrepare eſt cenſenda, vnde nemini mirum videri debet, ſi iſte caſus ex noſtra analyſi deriuari nequit, interim tamen etiam ex noſtris formulis generalibus non difficulter deducitur, dummodo angulus ϑ non tanquam infinite paruus ſpectetur.

Euolutio concinnior huius ſolutionis.

§. 13. Cum tota ſolutio ex tribus quantitatibus datis a, b, c ſit repetenda, ſtatuatur primo $\frac{b+cc}{b}=f$ quae eſt ea ipſa quantitas, quam illuſtris Auctor ſuperioris diſſertationis littera a deſignauit, dum longitudinem fili A B poſuit $=b$ quae hic eſt $=a$, hinc ſtatim modo ſimpliciori habebimus

$$p=\frac{a-f}{2b} \text{ et } q=\frac{\sqrt{(a-f)^2+4ab}}{2b},$$

vnde deducimus

$$mm = \frac{bg(a+f-\sqrt{(a-f)^2+4ab})}{acc} \text{ et}$$

$$nn = \frac{bg(a+f+\sqrt{(a-f)^2+4ab})}{acc}.$$

Ponamus autem porro breuitatis gratia $\sqrt{((a-f)^2 + 4ab)} = h$, vt fit $q = \frac{h}{2b}$ fietque

$$mm = \frac{bg(a+f-h)}{acc} \text{ et } nn = \frac{bg(a+f+h)}{acc},$$

tum vero bina membra quibus anguli u et v exprimebantur succinctius ita contrahi possunt, vt fit

$$u = C\,\mathrm{fin.}\,(mt+\mu) \text{ et } v = E\,\mathrm{fin.}\,(nt+\nu),$$

vbi litterae C, E et μ, ν denotant constantes per integrationem ingressas, quas ex motu initiali definiri oportet vti mox videbimus.

§. 14. Quia deinde habuimus:

$$\vartheta = \frac{u-v}{2q} \text{ et } \Phi = \frac{u+v}{2} - \frac{p(u-v)}{2q}$$

nunc erit

$$\vartheta = \frac{b(u-v)}{h} \text{ et } \Phi = \frac{u+v}{2} - \frac{a-f(u-v)}{2h} \text{ siue } \Phi = \frac{(h-a+f)u}{2h} + \frac{(h+a-f)v}{2h}$$

vnde si loco v et u valores ante dati substituantur nanciscimur

$$\vartheta = \frac{Cb}{h}\,\mathrm{fin.}\,(mt+\mu) - \frac{Eb}{h}\,\mathrm{fin.}\,(nt+\nu) \text{ et}$$

$$\Phi = \frac{C(h-a+f)}{2h}\,\mathrm{fin.}\,(mt+\mu) + \frac{E(h+a-f)}{2h}\,\mathrm{fin.}\,(nt+\nu)$$

ex quibus formulis ad datum quoduis tempus t ambo anguli ϑ et Φ assignari poterunt, vnde totus penduli motus innotescet.

§. 15. Vt vero etiam ipsa celeritas angularis vtriusque motus patescat, notandum est celeritatem angu-

angularem, qua bini anguli ϑ et Φ increſcunt, eſſe $\frac{d\vartheta}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ quae igitur ex noſtris formulis fient

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{mCb}{b}\,\text{coſ.}\,(mt+\mu) - \frac{nEb}{b}\,\text{coſ.}\,(nt+\nu)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{mC(b-a+f)}{2b}\,\text{coſ.}\,(mt+\mu) + \frac{nE(b+a-f)}{2b}\,\text{coſ.}\,(nt+\nu)$$

atque hinc iam pro ipſo motus initio, quo erat tempus $t=0$, non ſolum ipſos angulos ϑ et Φ ſed etiam eorum celeritates angulares tam filo quam corpori primum impreſſas aſſignare poterimus, erat enim ipſo motus initio vbi $t=0$

$$\vartheta = \frac{Cb}{b}\,\text{ſin.}\,\mu - \frac{Eb}{b}\,\text{ſin.}\,\nu$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{mCb}{b}\,\text{coſ.}\,\mu - \frac{nEb}{b}\,\text{coſ.}\,\nu$$

$$\Phi = \frac{C(b-a+f)}{2b}\,\text{ſin.}\,\mu + \frac{E(b+a-f)}{2b}\,\text{ſin.}\,\nu$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{mC(b-a+f)}{2b}\,\text{coſ.}\,\mu + \frac{nE(b+a-f)}{2b}\,\text{coſ.}\,\nu$$

quae quatuor quantitates cum ex dato motu initiali ſint cognitae, hinc quatuor noſtras conſtantes C, E et angulos μ et ν definire licebit, ita vt deinceps pro quouis tempore t noſtrae formulae determinatos valores ſint exhibiturae.

§. 16. Cum in has determinationes gemini anguli $(mt+\mu)$ et $(nt+\nu)$ ingrediantur, qui adeo inter ſe incommenſurabiles eſſe poſſunt; motus vtique maxime complicatus exſurget, niſi forte alterutrum angulus ex calculo egrediatur, id quod vſu venit, ſi fuerit vel $C=0$ vel $E=0$, quibus caſibus motus regularis motui pendulorum ſimplicium ſimilis exorietur.

 §. 17.

§. 17. Sit igitur primo $E = 0$ ita vt motu determinatio tantum a solo angulo $(mt + \mu)$ pen deat atque manifestum est, post tempus $t = \frac{\pi}{m}$ sec vbi π denotat semiperipheriam circuli, cuius radiu $= 1$. sinum anguli $(mt + \mu)$ priori fore aequa lem at signo diuerso affectum, vnde hoc tempor $t = \frac{\pi}{m}$ pendulum vnam oscillationem peregisse cen sendum erit; simili modo si fuerit $C = 0$, oscilla tiones iterum euadent regulares et singulae absoluen tur tempore $t = \frac{\pi}{m}$ secund.

§. 18. Sin autem neque $E = 0$ neque $C = 0$ motus maxime erit irregularis, interim tamen eum mente saltem tanquam ex duplici motu regulari compo situm spectare licebit, quorum altero oscillationes pera gantur tempore $\frac{\pi}{m}$ sec. altero vero tempore $t = \frac{\pi}{n}$ sec prorsus vti Illustris Auctor superioris dissertation ingeniosissime ex suis principiis conclusit, atque ho obseruato facile erit pulcherrimum consensum inter vtramque solutionem agnoscere, etiamsi ex diuersis simis principiis ambae sint erutae.

Digressio ad oscillationes finitas.

§. 19. Hanc quaestionem methodo Bernoullia na ne tentare quidem licet, prima autem motu principia iam initio tres nobis suppeditauerunt ae quationes, quibus plena huius quaestionis solutio con tinetur, quae posito

$$x = a \cos. \vartheta + b \cos. \phi \quad \text{et} \quad y = a \sin. \vartheta + b \sin. \phi \text{ et}$$

I. $\frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{1 - T\cos.\vartheta}{M}$ II. $\frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-T\sin.\vartheta}{M}$

III. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-Tb\sin.(\Phi-\vartheta)}{Mcc}$

totum ergo negotium huc redit, vt istae aequationes per integrationem eo perducantur, vt singula motus phaenomena inde definiri queant, quae inuestigatio si minus succedat, imperfectioni Analyseos potius quam mechanicae erit tribuendum.

§. 20. Statim autem hinc vnam integrationem exsequi licet, si enim prima multiplicetur per

$$dx = -a\,d\vartheta\sin.\vartheta - b\,d\Phi\sin.\Phi$$

secunda vero per

$$dy = a\,d\vartheta\cos.\vartheta + b\,d\Phi\cos.\Phi$$

aggregatum colligitur fore

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{2g\,dt^2} = dx\left\{\begin{array}{l} +\frac{T}{M}(ad\vartheta\sin.\vartheta\cos.\vartheta + bd\Phi\cos.\vartheta\sin.\Phi) \\ -\frac{T}{M}(ad\vartheta\sin.\vartheta\cos.\vartheta + bd\Phi\cos.\Phi\sin.\vartheta)\end{array}\right.$$

vbi in terminis fractionem $\frac{T}{M}$ continentibus partes priores se destruunt, posteriores vero contrahuntur in $bd\Phi\sin.(\Phi-\vartheta)$ ita vt habeamus

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{2g\,dt^2} = dx\,\frac{T}{M}(b\,d\Phi\sin.(\Phi-\vartheta)$$

cui si addatur tertia aequatio per $cc\,d\Phi$ multiplicata, resultabit ita aequatio integrabilis

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + cc\,d\Phi\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = dx$$

cuius integrale est

$$\frac{dx^2 + dy^2 + cc\,d\Phi^2}{4g\,dt^2} = x + k$$

deno-

denotante k constantem integratione ingressam, haecque aequatio inuoluit conseruationem virium viuarum.

§. 21. Quia tensio fili T nondum constat, eam ex nostris aequationibus eliminemus, vbi

$I^{ma}\sin.\vartheta - II^{da}\cos.\vartheta$ praebet

$$\frac{ddx\sin.\vartheta - ddy\cos.\vartheta}{2g\,dt^2} = \sin.\vartheta$$

vt autem insuper aliam aequationem a tensione fili liberam obtineamus, euoluamus hanc combinationem

$I^{ma}\sin.\Phi - II^{da}\cos.\Phi$ vnde fit

$$\frac{ddx\sin.\Phi - ddy\cos.\Phi}{2g\,dt^2} = \sin.\Phi - \frac{T}{M}\sin.(\Phi - \vartheta)$$

cum nunc ex tertia aequatione fit

$$\frac{cc\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{T}{M}\sin.(\Phi - \vartheta)$$

haec ab illa in b ducta, subtracta relinquet

$$\frac{b\,ddx\sin.\Phi - b\,ddy\cos.\Phi - cc\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = b\sin.\Phi$$

in quibus duabus aequationibus integralis ante inventa iam continetur.

§. 22. Eliminemus autem insuper litteras x et y, vt binos tantum angulos variabiles ϑ et Φ cum tempore t in calculum introducamus et cum sit

$dx = -a\,d\vartheta\sin.\vartheta - b\,d\Phi\sin.\Phi$ et $dy = a\,d\vartheta\cos.\vartheta + b\,d\Phi\cos.\Phi$ erit

$ddx = -a\,dd\vartheta\sin.\vartheta - a\,d\vartheta^2\cos.\vartheta - b\,dd\Phi\sin.\Phi - b\,d\Phi^2\cos.\Phi$ et

$ddy = a\,dd\vartheta\cos.\vartheta - a\,d\vartheta^2\sin.\vartheta + b\,dd\Phi\cos.\Phi - b\,d\Phi^2\sin.\Phi$

vnde colligitur fore

$ddx\sin.\vartheta - ddy\cos.\vartheta = -a\,dd\vartheta - b\,dd\Phi\cos.(\Phi-\vartheta) + b\,d\Phi^2\sin.(\Phi-\vartheta)$

$ddx\sin.\Phi - ddy\cos.\Phi = -a\,dd\vartheta\cos.(\Phi-\vartheta) - a\,d\vartheta^2\sin.(\Phi-\vartheta) - b\,dd\Phi$

hi

his igitur valoribus substitutis binae nostrae aequationes has induent formas:

$$\text{I.}\quad \frac{a\,dd\vartheta - b\,dd\Phi\,\mathrm{cos.}(\Phi-\vartheta) + b\,d\Phi^2\,\mathrm{sin.}(\Phi-\vartheta)}{2g\,dt^2} = \mathrm{sin.}\,\vartheta$$

$$\text{II.}\quad \frac{a\,b\,dd\vartheta\,\mathrm{cos.}(\Phi-\vartheta) - a\,b\,d\vartheta^2\,\mathrm{sin.}(\Phi-\vartheta) - bb\,dd\Phi - cc\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = b\,\mathrm{sin.}\,\Phi$$

aequatio autem integrata quam supra inuenimus hanc induet formam

$$\frac{aa\,d\vartheta^2 + 2ab\,d\vartheta\,d\Phi\,\mathrm{cos.}(\Phi-\vartheta) + (bb+cc)\,d\Phi^2}{4g\,dt^2} = \mathrm{cos.}\,\vartheta + b\,\mathrm{cos.}\,\Phi + k.$$

§. 23. Hic ante omnia notatu digna occurrit haec combinatio

$$\mathrm{I}^{ma}\; b\,\mathrm{sin.}\,\Phi - \mathrm{II}^{da}\;(-\,\mathrm{sin.}\,\vartheta)$$

quae praebet hanc formam

$$\begin{aligned}&-ab\,dd\vartheta\,(\mathrm{cos.}\,\vartheta\,\mathrm{sin.}(\Phi-\vartheta)) + ab\,d\vartheta^2\,\mathrm{sin.}(\Phi-\vartheta)\,\mathrm{sin.}\,\vartheta\\ &-bb\,dd\Phi(\mathrm{cos.}\,\Phi\,\mathrm{sin.}(\Phi-\vartheta)) + bb\,d\Phi^2\,\mathrm{sin.}\,\Phi\,\mathrm{sin.}(\Phi-\vartheta) + cc\,dd\Phi\,\mathrm{sin.}\,\vartheta : 2g\,dt^2\end{aligned}$$

$= 0$ et per $\mathrm{sin.}(\Phi-\vartheta)$ diuidendo

$$-ab\,dd\vartheta\,\mathrm{cos.}\,\vartheta + ab\,d\vartheta^2\,\mathrm{sin.}\,\vartheta - bb\,dd\Phi\,\mathrm{cos.}\,\Phi + bb\,d\Phi^2\,\mathrm{sin.}\,\Phi + \frac{cc\,dd\Phi\,\mathrm{sin.}\,\vartheta}{\mathrm{sin.}(\Phi-\vartheta)} = 0$$

interim tamen fateri cogor me hinc nullam aliam aequationem integralem elicere posse, vnde vlteriorem harum aequationum euolutionem aliis suscipiendam relinquo. Missa igitur hac speculatione, examinemus accuratius quantum minimae saltem huius generis oscillationes a motu pendulorum simplicium discrepare possint.

Comparatio istarum oscillationum minimarum cum motu penduli simplicis per euolutionem casus determinati instituta.

§. 24. Ante omnia igitur necesse est, vt motum penduli ordinarii ad similem formam analyticam reuocemus. Concipiamus igitur filum A B = tanquam virgam rigidam etiamnum grauitatis expertem, cui corpus B M N in B ita sit affixum, vt A B C sit linea recta neque in B vlla inflexio oriri queat; quod si iam ad tempus datum t declinatio huius penduli V A B dicitur $= \eta$ ob momentum inertiae corporis B M N respectu axis girationis A $= M((a+b)^2 + cc)$ habebitur ista aequatio differentialis

$$\frac{dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{(a+b)\,\text{fin.}\,\eta}{(a+b)^2+cc}$$

vbi ob oscillationes minimas loco fin. η scribere licet ipsum angulum η, hinc igitur si breuitatis gratia faciamus

$$\frac{2g(a+b)}{(a+b)^2+cc} = ll,$$

post duplicem integrationem reperitur fore

$$\eta = A\ \text{fin.}\,(lt+\lambda)$$

vbi A et λ sunt constantes arbitrariae, ex qua formula intelligitur tempus vnius cuiusque oscillationis fore $= \frac{\pi}{l}$ sec.

§. 25.

§. 25. Vt iam casum determinatum ad calculum renocemus, sit corpus annexum B M N globus ex materia homogenea confectus et statuamus

I°. Longitudinem fili A B $= a = 3$ digit.

II°. Radium globi B C $= b = 1$ digit.

III°. Hinc autem fiet $cc = \frac{2}{5}bb = \frac{2}{5}$

Hic autem digitos intelligamus decimales pedis rhenani ita vt fiat altitudo $g = 156\frac{1}{4}$ digit. his positis pro motu penduli rigidi colligimus fore $ll = \frac{6250}{82} = 76,21951$ hincque $l = 8,73038$ vnde tempus vnius oscillationis prodit $= 0,35984$ sec.

§. 26. Faciamus nunc etiam calculum pro nostro pendulo flexili, quod non differt a praecedente nisi quod globus hic etiam circa punctum B girari possit ex §. 13. deriuemus valores

I°. $f = \frac{b+cc}{b} = \frac{7}{5} = 1,40000$

II°. $a - f = 1,60000$ et

III°. $h = \sqrt{((a-f)^2 + 4ab)} = 3,81575$

vnde porro colligimus

$mm = \frac{bg(a+f+b)}{acc} = \frac{(156,250)(0,58424)}{1,20000} = 76,07332$

hinc $m = 8,72200$ porro

$nn = \frac{bg(a+f+h)}{acc} = \frac{(156,250)(8,21575)}{1,20000} = 1069,768$ et

hinc $n = 32,70730$

pro ipsis autem angulis ϑ et Φ habemus

$\frac{b}{h} = 0,26207$, $\frac{h-a+f}{2h} = 0,29036$ et $\frac{h+a-f}{2h} = 0,70967$

 hinc-

hincque anguli ϑ et Φ ita definientur

$$\vartheta = 0,26207\,C \sin.(mt+\mu) - 0,26207\,E \sin.(nt+\nu)$$

$$\Phi = 0,29036\,C \sin.(mt+\mu) + 0,70967\,E \sin.(nt+\nu)$$

denique pro vtroque motu angulari inuenimus

$$\frac{d.\vartheta}{dt} = 2,28578\,C \cos.(mt+\mu) - 8,57160\,E \cos.(nt+\nu)$$

$$\frac{d.\Phi}{dt} = 2,53253\,C \cos.(mt+\mu) + 23,21159\,E \cos.(nt+\nu)$$

his inuentis sumamus primo pendulum initio hu[...] modi motum accepisse, vt fuerit $E = 0$ et cuid[...] est motum oscillatorium fore regularem, et vna[...] quamque oscillationem absolui tempore $= \frac{\pi}{m} = 0,360$[...] quod tempus ergo paulisper maius est quam in pe[...] dulo rigido, quod erat 0,35984 sec. idque in [...] tione 1029 : 1028 ita vt dum pendulum rigid[...] absoluit 1029 vibrationes, flexile tantum absol[...] 1028. Vt nunc definiamus quomodo pendulum [...] talem motum regularem sit incitandum, ponam[...] initio vbi $t = 0$ totum motum a quiete incep[...] sicque fuerit necesse est $\mu = \nu = 90$ gr. ex quo [...] tio ob $E = 0$ erat $\vartheta = 0,26207\,C$ et $\Phi = 0,29036$[...] vnde patet ratio inter hos duos angulos initial[...] quae erat $\vartheta : \Phi = 9 : 10$. Caeterum si filum A[...] prae radio globi BC adhuc longius acciperetur [...] ferentia inter vtrasque oscillationes multo minor [...] set proditura ita vt pro longioribus filis pro e[...] nescente haberi possit.

§. 27. Consideremus etiam alterum motu[...] regularem quo $C = 0$ et tempus vnius cuius[...]

osci[...]

oscillationis $= \frac{\pi}{n} = 0,09605$ ideoque fere quater breuius quam casu praecedente; ad talem autem motum pendulum initio ex quiete incitabitur si ob $C = O$ et $b = 90$ gr. capiatur angulus $\vartheta = -0,26207\,E$ et $\phi = 0,70967\,E$ penduli igitur figura ipso initio ita comparata fuerit necesse est, vt producto radio BC vsque ad verticalem in o sit proxime $BO = 1,1079$ ita vt centrum globi durante hoc motu vix a linea verticali recedat quandoquidem rectae AB et BO eandem inter se teneant rationem quam anguli ϕ et ϑ.

§. 28. Contemplemur vero etiam alium motum mixtum et quidem eum, qui oritur, si initio centrum globi C in ipsam directionem fili AB productam incidat hincque pendulum subito demittatur, vt vterque motus a quiete incipiat, fueritque declinatio penduli $VABC = \alpha$ ideoque $\vartheta = \phi = \alpha$. Quia igitur initio fit $t = O$ et $\mu = \nu = 90$ gr. habebimus

$$\alpha = 0,26207\,C - 0,26207\,E \text{ et}$$

$$\alpha = 0,29036\,C + 0,70967\,E$$

ex priore fit

$C = E + 3,81575\,\alpha$ qui valor in altera substitutus dat $E = -0,10795\,\alpha$ hinc $C = 3,70780\,\alpha$.

§. 29. Quia nunc litteras C, E per angulum minimum α datum determinauimus et anguli μ et ν inuenti sunt recti vnde fit

$$\text{fin.}(mt+\mu)=\text{cof.}\,mt \quad\text{et}\quad \text{fin.}(nt+\nu)=\text{cof.}\,nt$$

tum vero

$$\text{cof.}(mt+\mu)=-\text{fin.}\,mt \quad\text{et}\quad \text{cof.}(nt+\nu)=-\text{fin.}\,nt$$

Pro motu penduli fequentes formulas penitus determinatas habebimus

I°. $\vartheta=0,97172\,\alpha\,\text{cof.}\,mt+0,02829\,\alpha\,\text{cof.}\,nt$

II°. $\Phi=1,07625\,\alpha\,\text{cof.}\,mt-0,07661\,\alpha\,\text{cof.}\,nt$

III°. $\frac{d\vartheta}{dt}=-8,47539\,\alpha\,\text{fin.}\,mt-0,92533\,\alpha\,\text{fin.}\,nt$

IV°. $\frac{d\Phi}{dt}=-9,39031\,\alpha\,\text{fin.}\,mt+2,50572\,\alpha\,\text{fin.}\,nt$

vbi vti inuenimus eft $m=8,72200$ et $n=32,707$

§. 30. Ex his ergo formulis ad datum tempus quodcunque t in minutis fecundis expreffum, non folum pofitio fili A B et corporis annexi B M N fed etiam vtriusque motus angulis definiri poterit. Statim autem manifeftum eft ob terminos pofteriores angulum nt inuoluentes motum ofcillatorium aliquantisper perturbari debere; interim tamen quia haec membra prioribus multo funt minora, haec perturbatio fatis erit exigua; quantopere autem ob hanc caufam in dinumerandis ofcillationibus aberrari poffit, aliquanto accuratius inueftigemus, fi quidem iam fupra obferuauimus ofcillationes huius penduli flexilis tam parum ab ofcillationibus eiusdem penduli, fi effet rigidum, difcrepare, et tempore 10 ofcillationum vnica tantum ofcillatione errari.

§. 3

§. 31. Quo autem facilius in has perturbationes inquiramus, obseruemus si posteriora membra deessent motum ita futurum esse regularem, vt tempus vnius cuiusque oscillationis futurum sit $t = \frac{\pi}{m} = 0,36019$ sec. concipiamus igitur totum tempus in huiusmodi interualla diuisum et ob membra posteriora in initio cuiusque horum interuallorum neque filum A B neque ipsum corpus B M N in maxima digressione a situ verticali A V reperietur sed interdum vel iam praeteriisse vel nondum eo pertigisse deprehendetur, tum vero etiam neque filum neque corpus ad quietem erit redactum quia tum neque $\frac{d\vartheta}{dt}$ neque $\frac{d\Phi}{dt}$ penitus euanescent; quod quo clarius pateat elapsa iam sint λ huiusmodi interualla temporis ita vt sit $mt = \lambda\pi$ fierique poterit vt tum prodeat

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0,92533\,\alpha \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi}{dt} = 2,50572\,\alpha$$

ponamus igitur sumto $mt = \lambda\pi + \omega$ pendulum penitus ad quietem reduci, eritque pro filo

$$\text{sin.}\,\omega = \frac{0,92533}{8,47589} = \frac{1}{9}$$

proxime, cui tempus respondet $= \frac{1}{78}$ sec. ita vt in aestimatione siue initii siue finis cuiusque oscillationis errari possit, parte circiter septuagesima vnius minuti secundi, quare cum huiusmodi tantilli errores in numeratione oscillationum ne quidem percipi queant, ob hanc rationem ne minima quidem perturbatio motus oscillatorii resultare est censenda;

omnes

omnes autem aberrationes penitus ad nihilum redigentur, si longitudo fili prae magnitudine globi adhuc maior accipiatur, quemadmodum in experimentis fieri solet, vbi etiam prior error memoratus $\frac{1}{1028}$ multo magis diminuitur, vnde concludimus dummodo longitudo fili ad radium globi maiorem teneat rationem quam $3:1$ tum in motu oscillatorio nullum plane errorem a flexibilitate penduli esse metuendum.